Objectivos – aprender a interpretar economicamente as soluções dos problemas, incluindo preços-sombra, e a efectuar estudos de sensibilidade a alguns parâmetros.

Definições e Propriedades

Correspondência entre um par de problemas duais (primal/dual)

PRIMAL (DUAL)	DUAL (PRIMAL)
Maximizar $Max\ Z$ $(Max\ W)$	Minimizar $Min\ W$ $(Min\ Z)$
1 restrição	1 variável de decisão
i-ésima restrição de tipo "$\leq$"	$y_i \geq 0$ $(x_i \geq 0)$
i-ésima restrição de tipo "$\geq$"	$y_i \leq 0$ $(x_i \leq 0)$
i-ésima restrição de tipo "$=$"	y_i livre $(x_i$ livre$)$
Termos independentes b_i $i=1,\ldots,m$ $(c_j$ $j=1,\ldots,n)$	Coeficientes da função objectivo $W = b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m$ $(Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n)$
Coeficientes da função objectivo $Z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ $(W = b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m)$	Termos independentes c_j $j=1,\ldots,n$ $(b_i$ $i=1,\ldots,m)$
1 variável de decisão	1 restrição
$x_j \geq 0$ $(y_j \geq 0)$	j-ésima restrição de tipo "$\geq$"
$x_j \leq 0$ $(y_j \leq 0)$	j-ésima restrição de tipo "$\leq$"
x_j livre $(y_j$ livre$)$	j-ésima restrição de tipo "$=$"
Matriz de coeficientes técnicos A (A^T)	Matriz de coeficientes técnicos A^T (A)

O ***i-ésimo preço-sombra*** (y_i) representa a proporção de variação no valor óptimo em função do acréscimo no i-ésimo segundo membro.

Relação entre as variáveis de um par de problemas duais

nº	Primal	Dual
n	Variável de decisão	Restrição (variável desvio)
m	Restrição (variável desvio)	Variável de decisão

Propriedades da Dualidade

Propriedade 1: **Simetria** - O dual do dual é o primal.

Propriedade 2: **Teorema Fraco** (dado um problema primal de maximização)

Se $\mathbf{x}'=(x_1',x_2',\ldots,x_n')$ é SA primal e $\mathbf{y}'=(y_1',\ldots,y_m')$ é SA dual
então, $Z'=c_1x_1'+c_2x_2'+\ldots+c_nx_n' \le b_1y_1'+b_2y_2'+\ldots+b_my_m'=W'$.

Propriedade 3: Se $\mathbf{x}^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ é SA primal, $\mathbf{y}^*=(y_1^*,\ldots,y_m^*)$ é SA dual e

$$Z^*=c_1x_1^*+c_2x_2^*+\ldots+c_nx_n^* = b_1y_1^*+b_2y_2^*+\ldots+b_my_m^*=W^*$$

então, $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ são soluções óptimas dos respectivos problemas.

Propriedade 4: **Teorema Forte**
Dado um par de problemas duais, se um tem solução óptima então o outro também tem e os valores óptimos dos dois problemas são iguais, ou seja, $Z^*=W^*$.

Propriedade 5: Dado um par de problemas duais, se um tem soluções admissíveis e função objectivo ilimitada, o outro é impossível.

Propriedade 6: Dado um par de problemas duais, se um é impossível, o outro ou é impossível ou tem função objectivo ilimitada.

Tabela: Soluções Primal/Dual

PRIMAL / DUAL	Tem SA	Não tem SA
Tem SA	Os dois problemas têm SO e $Z^*=W^*$	Primal impossível Dual ilimitado
Não tem SA	Primal ilimitado Dual impossível	Primal impossível Dual impossível

Propriedade 7: Os preços-sombra são os valores das variáveis de decisão na solução óptima do dual.

Relações de **desvios complementares** entre soluções básicas complementares para problemas sem restrições de igualdade nem variáveis livres

Nº de variáveis	Variável Primal	Variável Dual
m	Básica	Não Básica
$\ell - m$	Não Básica	Básica